Introduction à la Conjecture d'Alexandru

Rappelons quelques résultats de Bernstein, Gelfand, Gelfand, Delorme, Beilinson, Guinzburg et Soergel. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semisimple complexe, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan contenue dans $\mathfrak{b}$. Soient $\mathcal{O}$ la catégorie associée à ces données par BGG et $\mathcal{O}_\rho$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{O}$ dont les objets ont le caractère infinitésimal généralisé du module trivial. Notons ρ la demi-somme des racines positives et W le groupe de Weyl, muni de sa fonction longueur ℓ et de son ordre de Bruhat. À $w \in W$ attachons le module de Verma M_w de plus haut poids $-w\rho - \rho$; rappelons que M_w a un unique sous-module maximal ; notons L_w le quotient correspondant. Soit P_w un revètement projectif de L_w ; posons $P := \oplus_w P_w$, $A := (\mathrm{End}_{\mathfrak{g}}\, P)^{op}$; notons A-df la catégorie des A-modules de dimension finie et E l'équivalence $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, -)$ de $\mathcal{O}_\rho$ sur A-df. Par abus notons encore M_w et L_w les images de ces objets par E, et désignons par $\boldsymbol{M}_w$ et $\boldsymbol{L}_w$ leurs classes respectives dans le groupe de Grothendieck. Notons $e_w \in A$ la projection sur P_w.

Théorème 1. On a $M_w \simeq Ae_w \Big/ \sum\limits_{x \not\leqslant w} A\, e_x\, A\, e_w = Ae_w \Big/ \sum\limits_{x > w} A\, e_x\, A\, e_w\,.$

Théorème 2. On a $\mathrm{End}_A(M_w) = \mathbb{C}$.

Considérons les polynômes de Delorme $a_{x,y} := SP\ \mathrm{Ext}_A^\bullet(M_x, L_y)$ où SP signifie «série de Poincaré».

Théorème 3. On a $\boldsymbol{L}_y = \sum_x\ a_{x,y}(-1)\ \boldsymbol{M}_x\,.$

Théorème 4. Il existe des polynômes $P_{x,y}$ tels que

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ a_{x,y} = t^{\ell(y)-\ell(x)}\ P_{x,y}(t^{-2}),\\
&(2)\ \ P_{x,y} \neq 0 \Longleftrightarrow x \leqslant y \Longleftrightarrow P_{x,y}(0) = 1,\\
&(3)\ \ P_{x,x} = 1,\\
&(4)\ \ \deg P_{x,y}\ <\ \frac{\ell(y)-\ell(x)}{2}\ \text{ si }\ x < y.
\end{aligned}$$

Théorème 5. On a $SP\ \operatorname{Ext}^{\bullet}_A(L_x, L_y)\ =\ \sum_z\ a_{z,x}\ a_{z,y}$.

Voici des analogues conjecturaux des ces énoncés pour les modules de Harish-Chandra.

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe à centre fini, K un sous-groupe compact maximal, $\mathcal{H}$ la catégorie des modules de Harish-Chandra associée à ces données et $\mathcal{H}_\rho$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ dont les objets ont le caractère infinitésimal généralisé du module trivial. Notons r le rang (réel) de G et Z l'algèbre $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_r]]$. Soit A une Z-algèbre telle que $\mathcal{H}_\rho \simeq A$-df, A est de type fini sur Z, A est commutative modulo son radical R et A est R-adiquement complète. (De telles algèbres existent et sont isomorphes en tant que $\mathbb{C}$-algèbres.) Choisissons une sous-algèbre A_0 de A relevant A/R et notons $\{e_i \mid i \in I\}$ l'ensemble (fini) des idempotents minimaux de A_0. Soit L_i le A-module simple associé à $i \in I$, soit $\ell(i)$ la dimension projective de L_i et $\leqslant$ le plus petit ordre sur I satisfaisant $i \leqslant j$ chaque fois que

$$\ell(j) = \ell(i) + 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ext}^1_A(L_j, L_i) \neq 0.$$

Utilisons librement les analogues évidents des notations introduites dans le cadre de la catégorie $\mathcal{O}$.

Conjecture 1. On a $Ae_i \Big/ \sum_{j \not\leqslant i} A\, e_j\, A\, e_i = Ae_i \Big/ \sum_{j > i} A\, e_j\, A\, e_i$.

Notons ce module M_i et posons

$$\overline{M}_i := M_i \,/\, \operatorname{rad}(\operatorname{End}_A M_i)\, M_i\,.$$

Cet objet ne coïncide pas toujours avec le module de Langlands correspondant.

Conjecture 2. On a $\mathrm{End}_A(\overline{M}_i) = \mathbb{C}$.

Considérons les polynômes de Delorme $a_{ij} := SP\ \mathrm{Ext}^\bullet_A(M_i, L_j)$.

Conjecture 3. On a $\boldsymbol{L}_j = \sum_i\ a_{ij}(-1)\ \overline{\boldsymbol{M}}_i$.

Conjecture 4. Il existe des polynômes p_{ij} satisfaisant (1), ..., (4).

Conjecture 5. Il existe des polynômes d_k tels que

$$SP\ \mathrm{Ext}^\bullet_A(L_i, L_j)\ =\ \sum_k\ d_k\ a_{ki}\ a_{kj}\,.$$

Le principal inconvénient de cette approche des modules de Harish-Chandra est que, contrairement à ce qui se passe pour les modules de BGG, rien de tout cela n'est calculable ! Voici un remède à la fois partiel et conjectural à ce mal. Supposons que G et K ont même rang. Dans la classification de Langlands L_i apparaît comme l'unique quotient simple d'un module induit à partir d'un sous-groupe parabolique P_i ; soit $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i$ la décomposition de Langlands de $\mathrm{Lie}(P_i)$; posons

$$\widetilde{d}_i := \left(1 - t^2\right)^{\dim \mathfrak{a}_i} \quad ;$$

soit $\widetilde{\ell}(i)$ la dimension de la $K_\mathbb{C}$-orbite attachée à i et $(\widetilde{p}_{ij})$ la famille des polynômes de Kazhdan-Lusztig-Vogan ; posons

$$\widetilde{a}_{ij}(t) = t^{\widetilde{\ell}(j)-\widetilde{\ell}(i)}\ \widetilde{p}_{ij}(t^{-2})\,.$$

Conjecture 5'. On a $SP\ \mathrm{Ext}^\bullet_A(L_i, L_j)\ =\ \sum_k\ \widetilde{d}_k\ \widetilde{a}_{ki}\ \widetilde{a}_{kj}$.
